Question 33 (4 points). Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ et $A = \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T$.

1. (1 point) Montrer que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre de A.
2. (1 point) Calculer la dimension du noyau de A, (justifier chaque affirmation !).
3. (1 point) Identifier le noyau de A comme un certain sous-espace orthogonal.
4. (1 point) Conclure des trois points ci-dessus que A est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u}\}$.

(a) On calcule simplement $A\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T)\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}(\overrightarrow{u}^T\overrightarrow{u})$, par associativité de la multiplication matricielle. Puisque $\overrightarrow{u}$ est unitaire, $\overrightarrow{u}^T\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2 = 1$ si bien que $A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

(b) La i-ème ligne de la matrice A est $u_i\overrightarrow{u}^T$. Toutes les lignes sont donc proportionnelles, si bien que le rang de la matrice A vaut 1 car $\overrightarrow{u}$ est non nul. Le Théorème du rang implique alors que le noyau de A est de dimension $n-1$.

(c) On identifie le noyau de A avec $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u}\}^\perp$. Comme $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u}\}$ est de dimension 1, le sous-espace orthogonal est de dimension $n-1$. Il suffit donc de montrer que tout vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$ est dans le noyau.
Pour cela on calcule comme en (a) pour un vecteur $\overrightarrow{v}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{u}$ que

$$A\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}(\overrightarrow{u}^T\overrightarrow{v}) = 0$$

puisque le produit scalaire $\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = \overrightarrow{u}^T\overrightarrow{v} = 0$.

(d) La projection orthogonale proj sur la droite $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u}\}$ est la seule application linéaire qui fixe $\overrightarrow{u}$ et envoie $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u}\}^\perp$ sur zéro. La matrice A représente donc cette projection puisqu'elle a les mêmes propriétés. Idéalement on pourrait construire une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_n)$ où les $\overrightarrow{u}_i$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{u}$. Une application linéaire est complètement déterminée par ce qu'elle fait sur une base et justement $A\overrightarrow{u} = \mathrm{proj}\,\overrightarrow{u}$ et $A\overrightarrow{u}_i = \mathrm{proj}\,\overrightarrow{u}_i$ pour tout $2 \le i \le n$.

Question 34 (14 points). (a) (4 points) On considère le sous-espace W de $\mathbb{R}^4$ donné par l'équation $x_1+2x_2+x_3+2x_4=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{b}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ forment une base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \overrightarrow{b}_3\right)$ de W. Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à cette base $\mathcal{B}$ pour construire une base orthogonale de W.

On constate que les vecteurs $\overrightarrow{b}_1 = \overrightarrow{c}_1$ et $\overrightarrow{b}_2 = \overrightarrow{c}_2$ sont orthogonaux car $\overrightarrow{b}_1 \cdot \overrightarrow{b}_2 = 0$. Il ne reste donc qu'à rendre $\overrightarrow{b}_3$ orthogonal à ces deux premiers vecteurs. On utilise la formule de Gram-Schmidt

$$\overrightarrow{c}_3 = \overrightarrow{b}_3 - \frac{\overrightarrow{c}_1 \cdot \overrightarrow{b}_3}{\overrightarrow{c}_1 \cdot \overrightarrow{c}_1}\overrightarrow{c}_1 - \frac{\overrightarrow{c}_2 \cdot \overrightarrow{b}_3}{\overrightarrow{c}_2 \cdot \overrightarrow{c}_2}\overrightarrow{c}_2$$

Et on calcule les quatre produits scalaires

- $\overrightarrow{c}_1 \cdot \overrightarrow{c}_1 = 4+1 = 5 = \overrightarrow{c}_2 \cdot \overrightarrow{c}_2$;
- $\overrightarrow{c}_1 \cdot \overrightarrow{b}_3 = 2$;
- $\overrightarrow{c}_2 \cdot \overrightarrow{b}_3 = -2$.

On obtient ainsi le vecteur

$$\overrightarrow{c}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

On pourra ainsi choisir comme base orthogonale $\mathcal{C}' = (\overrightarrow{c}_1, \overrightarrow{c}_2, \overrightarrow{c}_3)$ ou multiplier le dernier vecteur par 5 pour obtenir une base

$$\mathcal{C}' = \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

On ne demande pas de rendre les vecteurs unitaires !

(b) (3 points) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

On calcule $c_A(t)$ en effectuant des opérations sur les lignes ou sur les colonnes :

$$\begin{vmatrix} 3-t & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6-t & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3-t & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 6-t \end{vmatrix} \underset{L_4-L_2}{\overset{}{=}}{}^{L_3-L_1} \begin{vmatrix} 3-t & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6-t & 2 & 4 \\ t-2 & 0 & 2-t & 0 \\ 0 & t-2 & 0 & 2-t \end{vmatrix} =^{\text{lin.}} (t-2)^2 \begin{vmatrix} 3-t & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6-t & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

On ajoute ensuite la troisième colonne à la première et la quatrième à la deuxième :

$$c_A(t) = (t-2)^2 \begin{vmatrix} 4-t & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 10-t & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{dév. selon} L_3}{\overset{\text{dév. selon} L_4}{=}} (t-2)^2 \begin{vmatrix} 4-t & 4 \\ 4 & 10-t \end{vmatrix}$$

Ainsi

$$c_A(t) = (t-2)^2(t^2 - 14t + 40 - 16) = (t-2)^2(t^2 - 14t + 24) = (t-2)^3(t-12)$$

(c) (3 points) Calculer une base orthonormée des espaces propres E_2 et E_{12} de la matrice A.

On commence par calculer E_2. On voit que

$$E_2 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = W$$

où W est l'hyperplan de la partie (a). On a déjà une base orthogonale, il faut encore normaliser les vecteurs :

$$\mathcal{C} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{10}}{10}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

On calcule ensuite E_{12}, soit en résolvant le système directement, soit en se souvenant que cet espace propre doit être orthogonal à E_2 si bien que son vecteur directeur unitaire doit être

$$\overrightarrow{c}_4 = \frac{\sqrt{10}}{10}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(d) (2 points) Construire une base $\mathcal{C}$ et une matrice orthogonale de changement de base $U = (\mathrm{Id})_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}an}$ qui permet de diagonaliser A.

La base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ cherchée est formée des bases trouvées en ci-dessus :

$$\mathcal{C} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{10}}{10}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{10}}{10}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Ainsi la matrice orthogonale est

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{2\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{2\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{2\sqrt{10}}{10} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}$$

(e) (2 points) Donner la formule de changement de base et la forme diagonale de la matrice congruente à A pour le changement de base du point (d).

La matrice D est la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$. Attention à l'ordre des coefficiens diagonaux, ils doivent correspondre au choix de la base.
La formule de changement de base est $D = U^T AU = U^{-1}AU$ ou aussi $A = UDU^T = UDU^{-1}$.